

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

**по дисциплине:** Математические основания алгоритмов и сложность вычислений

**по направлению:** Информатика и вычислительная техника

**профиль подготовки:**

Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра алгоритмов и технологий программирования

**курс:** 1

**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: С.Л. Бабичев, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры алгоритмов и технологий программирования 03.06.2021

## Аннотация

Дисциплина является базой курса по математическим основам вычислений, и подразумевает изучение общих математических принципов, необходимых для дальнейшего изучения алгоритмов. В рамках курса будут рассматриваться математические основы без изучения которых невозможно определять сложность алгоритмов и их корректность.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Целями освоения дисциплины являются ознакомление студентов с математическими основами, требуемых для осознанного принятия решений при проектировании алгоритмов, доказательства их корректности и их вычислительной сложности.

#### Задачи дисциплины

- освоить основные математические понятия, необходимые для практической деятельности
- научить осознанно применять изученный математический аппарат для разработки и анализа алгоритмов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основы логики, логических функций, их свойств и операций над ними;  
основы теории множеств и комбинаторики;  
основы теории чисел;  
основы рекуррентных последовательностей, рекурсии, производящих функций, теории сумм;

основы теории вероятностей и математической статистики;  
основы теории игр;  
основы теории графов.

уметь:

применять полученные знания для решения подзадач, возникающих при проектировании алгоритмов и программ

находить инварианты при исполнении алгоритма, требуемые для доказательства его корректности;

обоснованно находить сложность алгоритма.

владеть:

основами методов доказательства корректности алгоритмов;

основами методов доказательства корректности алгоритмов.

#### **4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

##### **4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий**

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Введение	2			3
2	Основы математической логики	2			3
3	Введение в числа и их представление	2			3
4	Рекурренты, индукция, индуктивные функции	2			4
5	Суммы	2			4
6	Целочисленные функции	2			4
7	Теория множеств и комбинаторика	2			4
8	Теория чисел	2			5
9	Производящие функции	2			7
10	Специальные числа	2			6
11	Основы теории вероятности и математической статистики	2			6
12	Асимптотика	2			6
13	Основы теории игр	2			6
14	Основы вычислительной геометрии	2			6
15	Основы теории графов	2			8
Итого часов		30			75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### **4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)**

Семестр: 1 (Осенний)

###### **1. Введение**

Цель курса. Основная терминология и обозначения. Краткое представление будущих тем. Математика и программирование.

###### **2. Основы математической логики**

Функции алгебры логики: перечислимость, способы задания, суперпозиция, тождественность, существенная зависимость и независимость от переменных. Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность. Штрих Шеффера и стрелка Пирса и их связь со схемотехникой. Нормальные конъюнктивная и дизъюнктивные формы. Линейные и самодвойственные функции. Замена переменных и суперпозиция. Полином Жегалкина. Проблема 2SAT.

### 3. Введение в числа и их представление

Информационная ёмкость числа. Введение в системы счисления и представление чисел в исполнителе алгоритма. (n)-числа. Операции над (n)-числами. Алгоритм Карацубы без доказательства сложности. Вещественные числа и их представление. Погрешности - абсолютная и относительная. Основные правила оперирования с погрешностями.

### 4. Рекурренты, индукция, индуктивные функции

Ханойская башня. Разбиение большой задачи на подзадачи. Доказательство достаточного и необходимого количества перемещений. Дедукция. Математическая индукция - база и индуктивный переход. Виды индукции. Три стадии решения рекуррентных задач. Индуктивные функции. Инварианты и полуинварианты.

### 5. Суммы

Суммы. Члены сумм. Сигма-обозначение. Индексные переменные. Гармонические числа. Суммы и рекуррентности. Рекуррента Хоара. Законы работы с суммами - дистрибутивный, ассоциативный, коммутативный. Преобразование сумм. Метод перестановок. Кратные суммы. Обобщённый дистрибутивный закон. Бесконечные суммы. Парадоксы бесконечных сумм. Сходимость. Абсолютная сходимость.

### 6. Целочисленные функции

Функции  $\text{floor}(x)$ ,  $\text{ceil}(x)$ . Их свойства. Интервальная арифметика. Спектр действительного числа. Рекурренты с полом и потолком. Теорема Боля, Серпинского и Вейля без доказательства.

### 7. Теория множеств и комбинаторика

Определения. Универсум. Мощность множества. Счётные множества. Отображения. Основные операции над множествами. Формула  $n^m$  и её применения. Формула  $[n]_m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$  и её применения. Число подмножеств n-элементного множества. Последовательности подмножеств. Упорядоченные разложения чисел. Шары и перегородки. Учёт одинаковых конфигураций. Разбиение на пары. Рекуррентные отношения разбиения. Упорядоченные размещения. Задача Муавра. Сочетания: основные свойства, соотношения и тождества. Биномиальные коэффициенты.

### 8. Теория чисел

Основы алгебры. Элементы и операции. Группы: коммутативные и некоммутативные. Порождающие элементы. Циклические группы. Кольца: коммутативные и некоммутативные; с единицей. Поля. Моноиды. Бинарная операция mod. Делимость. НОД и НОК. Алгоритм Евклида: простой и расширенный. Диофантовы уравнения. Простые числа. Системы счисления. Модульная арифметика. Основная теорема арифметики. Факториальные разложения. Взаимная простота. Деревья Штерна-Броко и система счисления Штерна-Броко. Теорема Ферма. Теорема Вильсона. Функция и теорема Эйлера. Мультипликативность функции Эйлера. Китайская теорема об остатках. Алгоритм Гарнера. Соотношение Безу. Факторизация. Алгоритмы ро-Полларда, ро-1-Полларда, Ферма.

## 9. Производящие функции

Вывод производящей функции чисел Фибоначчи. Задача о покрытии домино. Задача о размене монет. Решение рекуррентных соотношений через производящие функции. Свёртки.

## 10. Специальные числа

Числа Стирлинга. Числа Эйлера. Числа Каталана. Числа Фибоначчи. Непрерывные дроби. Связь дерева Штерна-Броко с непрерывными дробями. Континуанты.

## 11. Основы теории вероятности и математической статистики

Дискретная вероятность. Вероятностное пространство. Случайная величина. Зависимые и независимые случайные величины. Средние величины, Математическое ожидание и дисперсия. Биномиальное распределение. Хеширование. Теорема о совершенной хеш-функции. Передокс дней рождения.

## 12. Асимптотика

Отношения между функциями. Семейство логарифмически-экспоненциальных функций Харди. Теорема Харди. О-, Omega-, Theta- и o-нотации и выражения. Операции над О-выражениями. Мастер-теорема о рекурсии.

## 13. Основы теории игр

Позиции. Выигрышные и проигрышные позиции. Ходы. Ранги позиций. Принцип минимакса. Альфа-бета отсечение. Ним и ним-подобные игры. Игра Шпрага-Гранди.

## 14. Основы вычислительной геометрии

Основы векторной алгебры. Матрицы и их определители. Евклидово пространство. Скалярное и векторное произведения. Взаимное расположение точек и прямых. Формула Пика. Площади, объёмы и расстояния.

## 15. Основы теории графов

Определения. Степени вершин. Лемма о рукопожатиях. Пути в графах. Эйлеровы пути и Эйлеровы циклы. Связные графы. Ориентированные и неориентированные графы. Изоморфность и планарность. Формула Эйлера. Компоненты связности. Индукция на графах. Двудольные графы. Деревья.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедийным оборудованием (проектор или плазменная панель), доской.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Конкретная математика. Основание информатики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник ; пер. с англ. Б. Б. Походзея, А. Б. Ходулёва ; под ред. А. Б. Ходулёва .— 3-е изд. — М. : Мир : Бином. Лаб. знаний, 2009 .— 703 с.
2. Дискретная математика для программистов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ф. А. Новиков .— 3-е изд. — СПб. : Питер, 2008, 2009 .— 384 с.
3. Дискретная математика [Текст] : графы, матроиды, алгоритмы : учеб. пособие для вузов / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин .— Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001 .— 288 с.

Дополнительная литература

Не предусмотрено

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1.  
[http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Дискретная\\_математика,\\_алгоритмы\\_и\\_структуры\\_данных](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Дискретная_математика,_алгоритмы_и_структуры_данных) – «Викиконспекты», сайт Санкт-Петербургского Института теоретической механики и оптики.
2. <https://ejudge.lksh.ru/archive/2014/07/A/games.pdf> – Станкевич А., Игры на графах.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

В преподавании дисциплины сочетаются практические занятия в компьютерном классе и домашние задания, состоящие из теоретических задач.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра алгоритмов и технологий программирования
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	С.Л. Бабичев, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математические основания алгоритмов и сложность вычислений» обучающийся должен:

### знать:

основы логики, логических функций, их свойств и операций над ними;  
основы теории множеств и комбинаторики;  
основы теории чисел;  
основы рекуррентных последовательностей, рекурсии, производящих функций, теории сумм;  
  
основы теории вероятностей и математической статистики;  
основы теории игр;  
основы теории графов.

### уметь:

применять полученные знания для решения подзадач, возникающих при проектировании алгоритмов и программ  
находить инварианты при исполнении алгоритма, требуемые для доказательства его корректности;  
  
обоснованно находить сложность алгоритма.

### владеть:

основами методов доказательства корректности алгоритмов;  
основами методов доказательства корректности алгоритмов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры задач:

1. Докажите, что количество способов разбить число в неупорядоченную сумму нечётного числа натуральных слагаемых равно количеству способов разбить это же число в неупорядоченную сумму натуральных слагаемых так, чтобы наибольшее из них было нечётным.



2. Докажите, что среди 6 человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень вопросов к устному экзамену:

1. Основы теории множеств, базовые понятия: множество, подмножество, упорядоченные пары. Аксиомы теории множеств.
2. Функция. Декартово произведение, отношение, функция. Алгебры.
3. Счёт. Основные комбинаторные выражения и их отображения на реальные задачи.
4. Доказательства. Прямое доказательство, от противного, contrapositive proof, математическая индукция. Коллизии и принцип Дирихле.
5. Нотация  $O/\theta/\omega(n)$ . Рассмотрение крайних случаев, применение на практике. RAM-модель, оценка сложности алгоритмов на примерах.
6. Рекуррентные соотношения. Рекуррентные функции. Получение явного вида из рекуррентного соотношения. Основная теорема о рекуррентных соотношениях. Числа Фибоначчи в лоб, линейно и логарифмически. Быстрое возведение в степень.
7. Основы линейной алгебры в приложении к вычислительным задачам. Вектор, матрица, линейные преобразования, линейная независимость.
8. Основы теории графов. Виды графов. Различные объекты на графах и их аналоги в реальном мире. Представление графов. Задачи, разрешимые без программирования (кратчайший путь через возведение графа в степень, численные характеристики графов).
9. Задачи дискретной оптимизации и их частные случаи. Поиск оптимального решения полным перебором. Динамическое программирование. Матроиды и жадные алгоритмы. О классах сложности, постановка  $P=NP$ .
10. Понятие дискретной вероятности и матожидания. Случайная величина. [Непрерывная случайная величина. Статистики и моменты]. Анализ алгоритма в среднем.
11. Представление числа. Целые, длинные, с плавающей запятой. Особенности использования в приложении к точности и скорости вычислений.
12. Регулярные выражения в программировании и математике.

Пример экзаменационного билета:

1. Сформулируйте и докажите мастер-теорему о рекурсии.
2. Сформулируйте алгоритм Гарнера и докажите его корректность.

#### Критерии оценивания

отлично

- 10 Полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы, код оформлен в едином удобочитаемом стиле
- 9 Полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы
- 8 Полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач

хорошо

- 7 Полностью решены все задачи. Допущены несущественные ошибки.
- 6 Полностью решено большинство задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.
- 5 Полностью решено две трети задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

удовлетворительно

- 4 Полностью решено более половины задач. В остальных задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

3 Полностью решено более половины задач.

неудовлетворительно

2 Решено менее половины задач.

1 Не решено ни одной задачи.

**5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой.